Problem lokacije bunara

Milan Kabić, Zagreb

U ovom ćemo članku navesti neke zanimljivosti vezane za trokut i njegovih pet kružnica: opisanoj kružnici, upisanoj kružnici i pripisanim kružnicama.

Legenda kaže da su jednom davno stanovnici triju sela, koja su bila smještena u jednoj plodnoj oazi, odlučili zajednički izgraditi duboki bunar za pitku vodu, kao spas za preživljavanje u doba velikih suša. U dogovorima su nastojali da se lokacija, gdje će se kopati bunar, odabere tako da niti jedno selo ne bude niti povlašteno niti zakinuto. Osim što bi zajedničke radove trebalo podjednako raspodijeliti među selima, također bi i prilazi bunaru za sve stanovnike morali biti podjednake duljine. Nakon dugih rasprava i pregovora stanovnici tih sela su se podijelili u dvije skupine od kojih je svaka zagovarala svoje rješenje. Evo tih prijedloga:

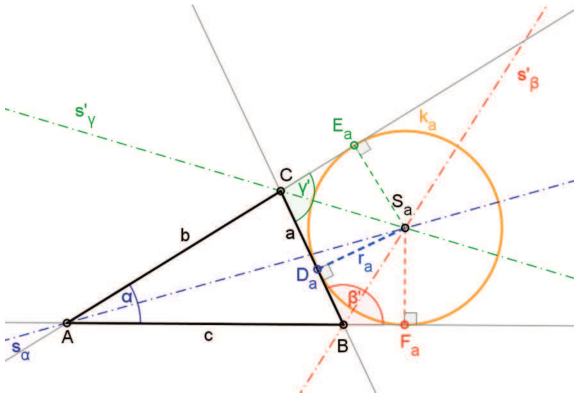
1. Lokaciju treba odrediti tako da od bunara do centra svakog sela, vode pravocrtni putovi jednakih duljina.
2. Kako su postojala tri pravocrtna puta, od kojih svaki prolazi točno kroz dva od tri spomenuta sela, druga skupina je zagovarala da mjesto gdje će se kopati bunar ispunjava dva uvjeta:
   a) bunar mora biti jednako udaljen od svake od tri navedene ceste,
   b) prilazni putovi od bunara do lokalnih cesta trebaju biti što je moguće kraći.

Pitanja koja su se nametnula zagovornicima obiju opcija glase:

Postoji li takva lokacija? Ako postoji, radi li se o jednom jedinom mjestu ili postoji više lokacija koje udovoljavaju postavljenim uvjetima?

U ovom članku ćemo navesti neke zanimljivosti vezane za trokut i njegovih pet kružnica: opisanoj kružnici, upisanoj kružnici i pripisanim kružnicama. Pokazat ćemo kako ovise udaljenosti bunara od svakog sela o udaljenostima među selima.

Teorem 1. *Simetrala unutarnjeg kuta i simetrale vanjskih kutova uz preostala dva vrha trokuta, sijeku se u jednoj točki. Ta je točka središte pripisane kružnice trokuta, koja dira jednu stranicu trokuta i produžetke drugih dviju.*



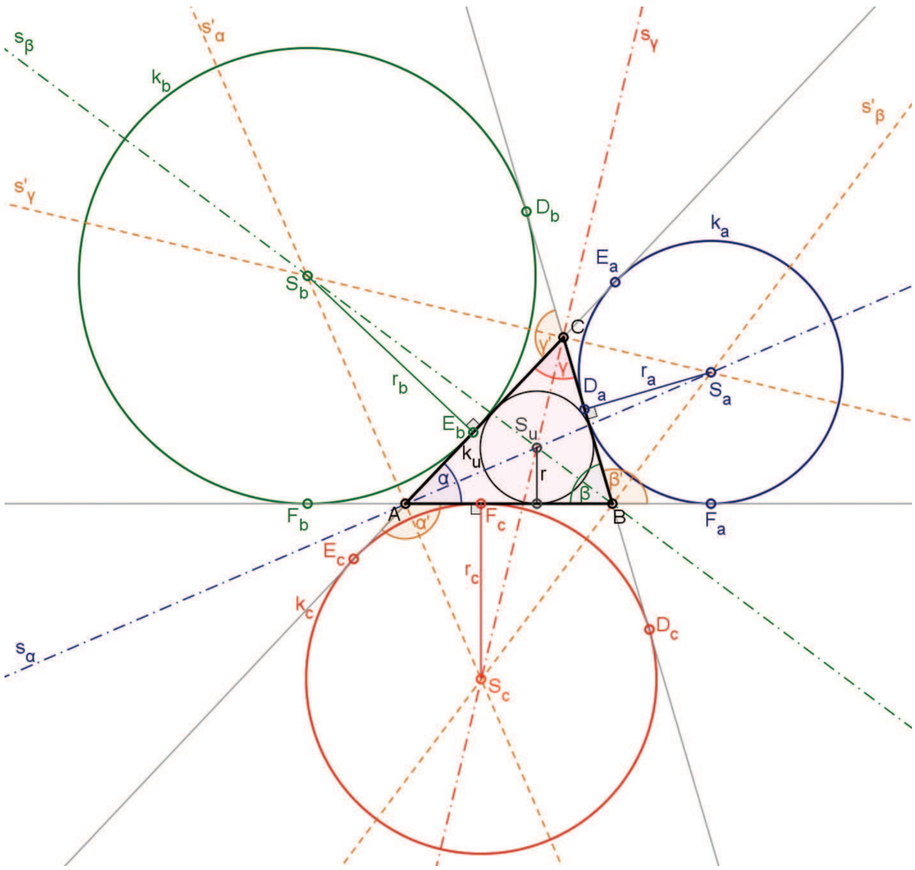
Slika 1.

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti oznake kao na slici 1. Simetrale s'_β i s'_γ vanjskih kutova β' i γ' sijeku se u točki S_a. Neka je F_a nožište okomice spuštene iz točke S_a na pravac AB, a E_a nožište okomice spuštene iz točke S_a na pravac AC.

Na osnovu poučka o simetrali kuta iz $S_a \in s'_\beta$ slijedi da je $|S_aF_a| = |S_aD_a|$, tj. točka S_a jednako je udaljena od pravaca AB i BC. Na isti način zaključujemo da je S_a jednako udaljena od pravaca BC i AC. A to znači da je jednako udaljena i od pravaca AB i AC. Po obratu poučka o simetrali kuta ona mora ležati na simetrali unutarnjeg kuta α. Dakle simetrale s_α, s'_β i s'_γ sijeku se u jednoj točki S_a. Iz ovog slijedi da postoji kružnica čije je središte točka S_a, a radijus

$$r_a = |S_aF_a| = |S_aE_a| = |S_aD_a|.$$

To je trokutu pripisana kružnica. Postoje još dvije takve kružnice k_b i k_c (vidi sliku 2).



Slika 2. Kružnice koje diraju sve tri stranice ili produžetke stranica trokuta ABC

Teorem 2. *Pripisana kružnica uz jednu stranicu trokuta dira produžetke ostalih dviju stranica u točkama kojima je udaljenost od nasuprotnog vrha jednaka poluopsegu trokuta, tj.*

$$|AE_a| = |AF_a| = s. \tag{1}$$

Dokaz. Pokažimo da su odsječci tangenata povučenih iz neke točke na kružnicu jednaki. Trokuti $\triangle AS_aE_a$ i $\triangle AS_aF_a$ su sukladni (vidi sliku 1), jer su pravokutni, podudaraju se u jednoj kateti $|S_aE_a| = |S_aF_a|$, a hipotenuza $\overline{AS_a}$ im je zajednička.

Dakle, vrijedi da je $|AE_a| = |AF_a|$.

Također je

$$|BF_a| = |BD_a| \quad \text{i} \quad |CE_a| = |CD_a|.$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} 2|AE_a| &= |AF_a| + |AE_a| \\ &= |AB| + |BF_a| + |AC| + |CE_a| \\ &= |AB| + |BD_a| + |AC| + |CD_a| \\ &= |AB| + |AC| + |BC| = a + b + c. \end{aligned}$$

Kako je

$$s = \frac{a+b+c}{2} \tag{2}$$

imamo da je

$$|AE_a| = |AF_a| = s.$$

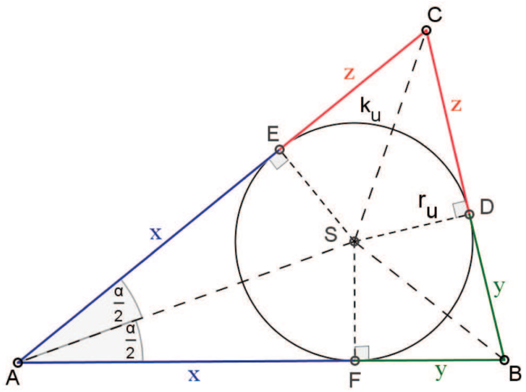
Analogno se dobiju ostale dvije formule:

$$\begin{aligned} |BD_b| &= |BF_b| = s, \\ |CE_c| &= |CD_c| = s. \end{aligned}$$

Teorem 3. *Udaljenost vrha trokuta od dirališta upisane kružnice sa stranicama trokuta kojima je to zajednički vrh jednaka je razlici poluopsega s i duljine nasuprotne stranice trokuta, tj. vrijedi:*

$$\begin{aligned} |AF| &= |AE| = s - a, \\ |BF| &= |BD| = s - b \quad \text{i} \\ |CD| &= |CE| = s - c, \end{aligned} \tag{3}$$

(vidi sliku 3).



Slika 3.

Dokaz. Prema teoremu 2 vrijedi da je

$$\begin{aligned} |AF| &= |AE| = x, \\ |BF| &= |BD| = y \quad \text{i} \\ |CD| &= |CE| = z. \end{aligned}$$

Očito je

$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \end{cases}$$

Zbrajanjem ovih triju jednakosti dobivamo:

$$2(x + y + z) = a + b + c = 2s, \quad \text{tj.}$$
$$x + y + z = s.$$

Sad je:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= s, \\ c + z &= s, \\ z &= s - c. \end{aligned}$$

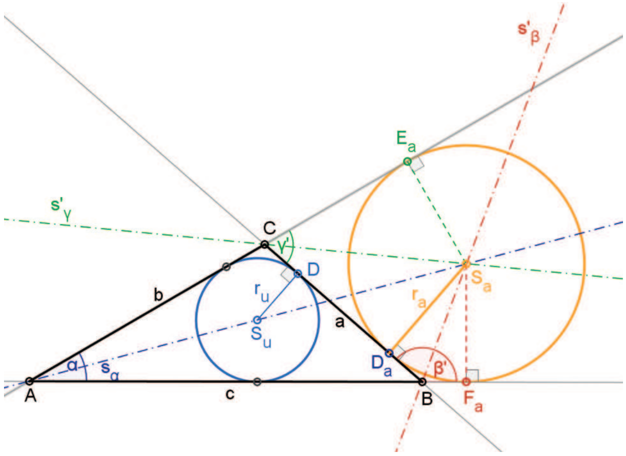
Na isti način dobijemo preostale dvije jednakosti

$$x = s - a, \qquad y = s - b.$$

Teorem 4. *Udaljenost točke u kojoj upisana kružnica dira jednu stranicu trokuta, od jednog njezinog kraja, jednaka je udaljenosti dirališta pripisane kružnice toj stranici, od drugog kraja te stranice, tj.*

$$|CD| = |BD_a| = s - c \quad \text{i} \quad |BD| = |CD_a| = s - b.$$

Dirališta upisane i pripisane kružnice, koja se nalaze na istoj stranici, dijele tu stranicu u obrnutim omjerima.



Slika 4.

Dokaz. Uzmimo da je $c > b$. Prema teoremu 3 vrijedi da je

$$|CD| = s - c \quad \text{(vidi sliku 4)}.$$

Prema (1) je

$$\begin{aligned} s &= |AE_a| = |AC| + |CE_a| \\ &= b + |CD_a| = b + a - |BD_a|. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} |BD_a| &= a + b - s = a + b - \frac{a+b+c}{2} \\ &= \frac{a+b-c}{2} = \frac{(a+b+c)-2c}{2} \\ &= s - c = |CD|, \quad \text{tj.} \\ |BD_a| &= |CD| = s - c. \end{aligned} \tag{4}$$

Sad je

$$\begin{aligned} |BD| &= |CD_a| = |BC| - |CD| \\ &= a - (s-c) = a + c - s = \frac{a+c-b}{2} \\ &= \frac{a+c+b-2b}{2} = s - b, \quad \text{tj.} \\ |CD_a| &= |BD| = s - b. \end{aligned} \tag{5}$$

I na kraju na osnovu (4) i (5) imamo:

$$\begin{aligned} |BD| : |CD| &= (s-b) : (s-c), \\ |BD_a| : |CD_a| &= (s-c) : (s-b). \end{aligned}$$

Na isti način se dokaže tvrdnja za preostale dvije stranice trokuta.

Zadatak 1. Kolika je udaljenost između onih dirališta, trokutu upisane i pripisane kružnice, koja se nalaze na istoj stranici trokuta?

Rješenje. Promatrat ćemo dirališta D i D_a na stranici $\overline{BC}$. Koristit ćemo oznake kao na slici 4.

Najprije dokažimo da iz $c > b$ slijedi da je $|BD| > |CD|$.

Iz pravokutnog trokuta S_uCD proizlazi da je $|CD| = r_u \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, a iz trokuta S_uBD da je $|BD| = r_u \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$. Iz $b < c$ slijedi da je $\beta < \gamma$, tj. $\frac{\beta}{2} < \frac{\gamma}{2} < 90°$. Zbog toga je $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} > \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, odnosno $|BD| > |CD|$. Na osnovu (4) i teorema 4 slijedi:

$$\begin{aligned} |DD_a| &= |BD| - |BD_a| = |CD| - |BD| \\ &= s - b - (s-c) = c - b. \end{aligned}$$

Za $b > c$ lako se dokaže da je $|CD| > |BD|$,

$$\begin{aligned} |DD_a| &= |BD_a| - |BD| = |CD| - |BD| \\ &= s - c - (s-b) = b - c. \end{aligned}$$

Dakle vrijedi da je

$$|DD_a| = |c - b|.$$

Dobili smo da je udaljenost između dirališta na istoj stranici, trokutu upisane i pripisane kružnice, jednaka apsolutnoj vrijednosti razlike duljina preostalih dviju stranica tog trokuta.

Zadatak 2. Kolika je udaljenost između dirališta jedne stranice trokuta s upisanom kružnicom i dirališta produžetka te iste stranice s odgovarajućom pripisanom kružnicom?

Rješenje. Uz oznake kao što su na slici 5, uzmimo dirališta F i F_a pravca AB i kružnica k_u i k_a.

Iz (1) i (3) slijedi

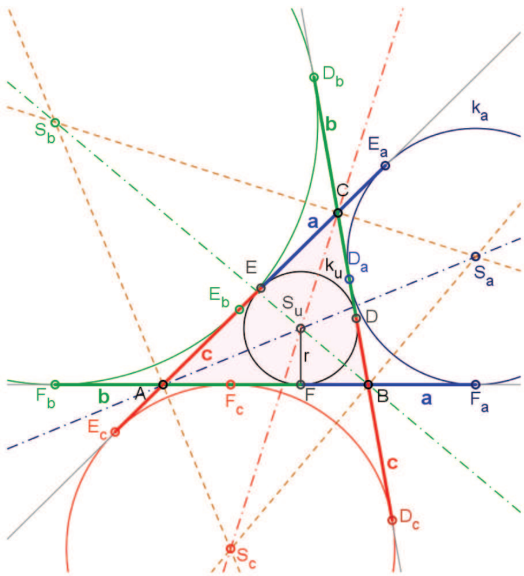
$$|FF_a| = |AF_a| - |AF| = s - (s - a) = a.$$

Na isti način se dobije

$$|EE_a| = |AE_a| - |AE| = s - (s - a) = a.$$

Analogno se dokaže da je:

$$|FF_b| = |DD_b| = b \quad \text{i} \quad |EE_c| = |DD_c| = c.$$



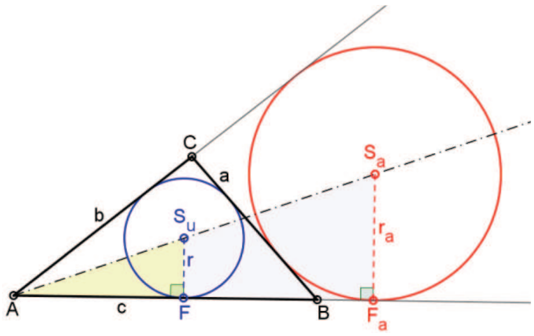
Slika 5.

Zaključak: *Udaljenost između dirališta jedne stranice trokuta i tom trokutu upisane kružnice te dirališta njezinog produžetka s pripisanom kružnicom, jednaka je duljini one stranice koju dodiruje ta pripisana kružnica.*

Teorem 5. *Duljine polumjera pripisanih kružnica trokuta, jednake su*

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b} \quad \text{i} \quad r_c = \frac{P}{s-c}, \qquad (6)$$

gdje je P površina, a s poluopseg trokuta.



Slika 6.

Dokaz. Sa slike 6 je očito $\triangle AFS_u \sim \triangle AF_aS_a$ pa je $r_a : r = |AF_a| : |AF|$.

Odavde uz (1) i (3) dobijemo da je

$$r_a = \frac{r|AF_a|}{|AF|} = \frac{rs}{s-a} = \frac{P}{s-a}.$$

Istim postupkom se dokažu preostale dvije formule.

Zadatak 3. Prikaži radijuse svih pet trokutovih kružnica preko duljina stranica trokuta.

Rješenje. Kod izvoda tih prikaza koristit ćemo sljedeće formule:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad (7)$$

$$R = \frac{abc}{4P} \qquad (8)$$

$$r = \frac{P}{s} \qquad (9)$$

Krenimo najprije s radijusom opisane kružnice. Iz formula (2), (7) i (8) slijedi:

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}. \qquad (10)$$

Za radijus upisane kružnice iz (2), (7) i (9) dobijemo:

$$r=\sqrt{\frac{P^2}{s^2}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r=\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)}}. \tag{11}$$

Iz (2), (6) i (7) za radijuse pripisanih kružnica slijedi:

$$r_a=\frac{P}{s-a}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}},$$

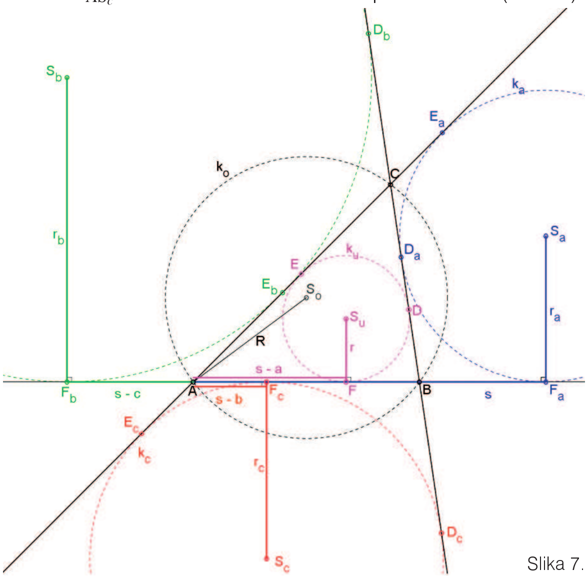
$$r_a=\sqrt{\frac{(a+b+c)(c+a-b)(a+b-c)}{4(b+c-a)}}. \tag{12}$$

Istim načinom dobijemo:

$$r_b=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{4(c+a-b)}}, \tag{13}$$

$$r_c=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)}{4(a+b-c)}}. \tag{14}$$

Zadatak 4. Prikaži duljine putova s_{AS_o}, s_{AS_u}, s_{AS_a}, s_{AS_b} i s_{AS_c} iz vrha A do središta svih pet kružnica (slika 7).



Slika 7.

Vratimo se sada pitanjima s početka ovog teksta. Rješenje prvog problema, što su ga postavili stanovnici sela, geometrijski gledano je jednostavno. Učenici uče trokutu opisanu i upisanu kružnicu još u osnovnoj školi, a onda to ponove u prvom razredu gimnazije i tehničkih škola. Najvjerojatnije će srednjoškolci znati točno rješenje prvog problema: *centri sela su u vrhovima A, B i C trokuta ABC, a lokacija bunara S_o je središte tom trokutu opisane kružnice. Pritom je rješenje jedinstveno, tj. postoji samo jedna lokacija koja zadovoljava navedene uvjete.*

Put do rješenja drugog problema je malo složeniji. Ako uzmemo u obzir samo prvi uvjet, postoje četiri moguće lokacije za kopanje bunara. To su središte upisane kružnice i još tri središta trokutu pripisanih kružnica. Udaljenosti bunara od lokalnih cesta jednake su polumjerima ovih kružnica. Kako je polumjer trokutu upisane kružnice očigledno najmanji, bunar treba kopati na mjestu koje odgovara središtu trokutu upisane kružnice. I ovo rješenje je jedinstveno.

Odgovori na ova pitanja matematičarima su prejednostavni, logični i prirodni. Međutim laiku nisu. Činjenica da se svakom trokutu može opisati jedna i samo jedna kružnica i da se svakom trokutu može upisati jedna i samo jedna kružnica je pravo čudo prirode. Ove činjenice povezuju (slobodno se može reći) dva najjednostavnija, a mnogi kažu i dva najljepša ravninska lika: trokut i kružnicu.

Zadatak 5. Prikaži udaljenosti vrhova A, B i C trokuta ABC od središta upisane i pripisanih kružnica pomoću duljina stranica a, b, c.

LITERATURA

1/ B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1 – Geometrija, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred prirodoslovne gimnazije, 2. dio*, Element, Zagreb, 2006.

2/ D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

3/ V. Devidé, *Stara i nova matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

4/ A. Marić, *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.