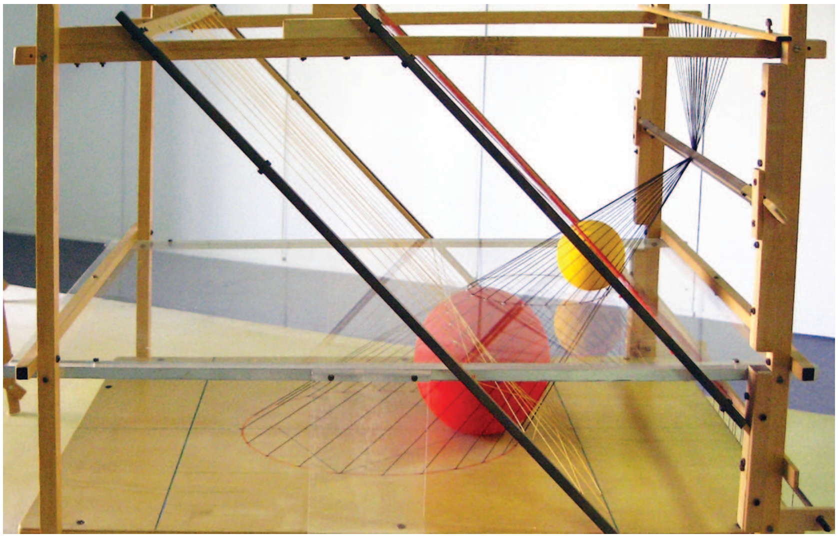
Dandelinove kugle

Ela Rac Marinić Kragić,
Zagreb



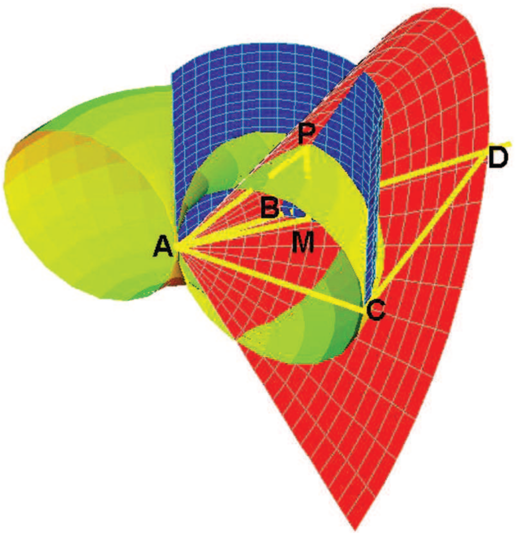
Povijesni pregled

Antička Grčka

Povijest konika počinje još u antičkoj Grčkoj s rješavanjem problema udvostručenja kocke, tzv. Delijskim problemom. Hipokrat s Hiosa (470. pr. Kr. – 410. pr. Kr.) je rješavajući taj stereometrijski problem došao do zaključka: *ako vrijede omjeri* $a : x = x : y = y : 2a$ *tada kocka s bridom duljine* x *ima dvostruki obujam od kocke s bridom* a. Na taj se način dolazi do jednakosti $2a^2 = xy$, odnosno $ya = x^2$. Stereometrijski problem transformiran je na problem ravnine. Trebalo je sada naći konstrukciju za dužine duljina x, y.

Pokušavajući naći konstrukciju, Arhit iz Tarenta (428. pr. Kr. – 347. pr. Kr.) Pitagorejac, dolazi do točke koja se dobiva u presjeku triju rotacijskih ploha — plašta valjka, stošca i torusa (vidi sliku 1).

Djelotvornije rješenje problema nalazi platonist Menehmo (380. pr. Kr. – 320. pr. Kr.). Njegovo originalno rješenje ovog problema uključuje točku koja je presjek dviju konika — parabole i hiperbole. Menehmo je otkrio da se presijecanjem uspravnog stošca ravninom koja je okomita na izvodnicu stošca dobiju do tada nepoznate krivulje. Vrsta krivulje je ovisila o vrsti stošca. Kod stošca koji ima šiljasti kut pri vrhu osnog presjeka, dobiva se elipsa, kod stošca pravokutnog osnog presjeka dobiva se



Slika 1.

parabola, a kod tupokutnog presjeka dobiva se hiperbola. Menehma smatramo ocem teorije ***konika*** (stari naziv ***čunosječnice***).

Njegovo djelo, kao i djela Euklida i Arhimeda, sabrao je i unaprijedio Apolonije iz Perge (262. pr. Kr. – 190. pr. Kr.). Apolonije je prvi uvidio da se na jednom te istom stošcu — bio on kos ili uspravan, šiljast ili tup — mogu u presjeku s ravninama položenim pod različitim kutovima dobiti sve tri konike — elipsa, parabola i hiperbola. Njegovo djelo o konikama sastoji se od 8 knjiga. On je prvi i nadjenuo nazive elipsi, hiperboboli i paraboli — više o tome pogledajte na `http://www.normala.hr/interaktivna_matematika/elipsa` pod *Povijesne crtice, Porijeklo imena*. Papo iz Aleksandrije (290. pr. Kr. – 350. pr. Kr.) uvodi pojam fokusa i direktrise. Upravo ova svojstva će kasnije dubrovački matematičar Ruđer Bošković (1711. – 1787.) iskoristiti u svojem radu koji je objavljen u djelu *Sectionum conicarum elementa* (Rim, 1764.)

Konike u renesansi

Zanimanje za konike je zamrlo sve do renesanse, kada raste interes zbog razvitka optike, astronomije i umjetnosti. Dok je Kopernik smatrao da se nebeska tijela gibaju po kružnicama, Johanes Kepler (1571. – 1630.) tvrdi da se gibaju po eliptičkim putanjama oko Sunca koje je u jednom fokusu konike. Kepler razlikuje pet vrsta konika: kružnicu, elipsu, parabolu, hiperbolu i pravac. Tvrdi da se jedna krivulja može dobiti iz druge neprekidnim mijenjanjem. Pravac i parabola su dva ekstremna oblika hiperbole, a parabola i krug su dva ekstremna oblika elipse.

Začetnikom modernog poimanja krivulja, pa tako i konika, smatra se René Descartes, koji 1637. godine objavljuje djelo *La Géométrie*. Descartes je shvatio krivulje kao geometrijsko mjesto točaka kojima koordinate zadovoljavaju određenu jednadžbu. Na taj se način danas u nastavnim programima matematike obrađuju konike. Ono je oprečno grčkom shvaćanju konika kao jedne cjeline. Više o elipsi možete pogledati na već spomenutoj internetskoj stranici udruge Normala pod temom interaktivna matematika.

Papo-Boškovićeva definicija konika: (pogledajte aplet na `http://www.normala.hr/interaktivna_matematika/elipsa` pod *Povijesne crtice, Boškovićev pristup*).

Neka je ε realan pozitivan broj, F čvrsta točka ravnine i d čvrsti pravac te ravnine. Skup svih točaka T za koje je omjer udaljenosti točke od F i točke od d konstantan i jednak broju ε

$$|TF| : |Td| = \varepsilon$$

je krivulja drugog reda i to:

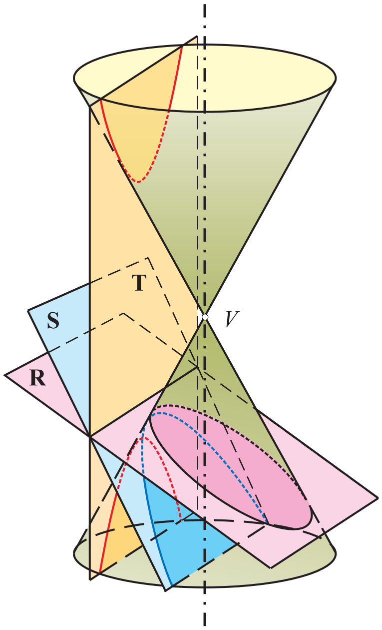
- za $0 < \varepsilon < 1$ elipsa,
- za $\varepsilon = 1$ parabola,
- za $\varepsilon > 1$ hiperbola.

Presjeci stožaste plohe i ravnine

Kružnica, elipsa, hiperbola i parabola zovu se konike jer se javljaju kao presjeci stožaste (*konusne*) plohe i ravnine (vidi sliku 2). Na slici je nacrtana stožasta ploha s vrhom u točki V. Ako ravnina prolazi vrhom V, tada će presjek biti samo točka V ili dvije izvodnice stošca. Ako ravnina ne prolazi vrhom V, tada vrijedi:

1) ako je ravnina okomita na os stošca, njezin presjek s plohom je kružnica,
2) ako ravnina nije okomita na os stošca i siječe sve izvodnice, presjek će biti elipsa (ravnina $\mathbf{R}$),
3) ako je ravnina paralelna s jednom izvodnicom, presjek će biti parabola (ravnina $\mathbf{S}$),
4) ako je ravnina paralelna s dvije izvodnice, presjek će biti hiperbola (ravnina $\mathbf{T}$).

Stari Grci bili su svjesni ovih činjenica, ali strogi matematički dokaz načinjen je pomoću kugli upisanih u stožastu plohu. Otkrivene su 1822. g. Nazvane su Dandelinovim kuglama u čast belgijskog matematičara, Germinala Pierre Dandelina (Dandlena) (1794. – 1847.), iako je svoj doprinos dao i Adolphe Quetelet, također Belgijanac. Dandelin je stožastu plohu presjekao ravninom π koja ne prolazi njenim vrhom. Zatim je upisao kugle tako da

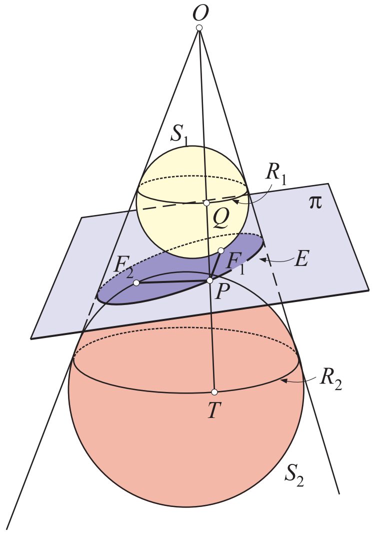


Slika 2.

one diraju stožastu plohu (u kružnici) i ravninu (u točki). Dokazao je da su presjeci stožaste plohe i ravnine konike, a točke u kojima kugle diraju ravninu, žarišta pojedinih konika. Također je pokazao da su pravci, u kojima ravnina π presijeca ravninu dodirne kružnice, ravnalice (direktrise).

Elipsa

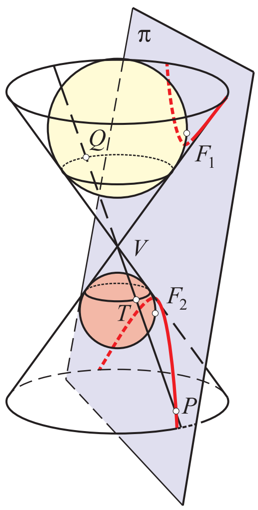
Izaberimo ravninu π koja siječe sve izvodnice i os stošca pod kutom koji nije pravi (kao u gore spomenutom slučaju 2). Ona presijeca stožastu plohu u krivulji E. Postoje dvije kugle koje iznutra dodiruju uspravnu stožastu plohu i ravninu π, a nalaze se na suprotnim stranama ravnine π (vidi sliku 3). Označimo sfere (kugline plohe) sa S_1 i S_2, a kružnice u kojima stožasta ploha dodiruje te sfere s R_1 i R_2. Izaberimo bilo koju izvodnicu stošca, neka ona dira krivulju E u točki P, kružnicu R_1 u točki Q, a kružnicu R_2 u točki T. Točke u kojima kugle dodiruju ravninu π označimo s F_1 i F_2. Kako su na svim tangentama iz iste točke na istu kuglu udaljenosti između te točke i dirališta jednake, vrijedi $|PF_1| = |PQ|$, odnosno $|PF_2| = |PT|$. Zato je $|PF_1| + |PF_2| = |QP| + |PT| = |QT|$. $|QT|$ je konstanta jer ne ovisi o izboru točke P. Zato je krivulja E elipsa sa žarištima u F_1 i F_2 te velikom osi koja je jednaka udaljenosti kružnica R_1 i R_2.



Slika 3.

Hiperbola

Izaberimo ravninu π koja siječe sve izvodnice osim dviju s kojima je paralelna (kao u spomenutom slučaju 4). Ona presijeca stožastu plohu u krivulji H. Obje Dandelinove kugle diraju ravninu π s iste strane. Opet uvedimo oznake kao i u prethodnom slučaju: dodirne točke kugli i ravni-

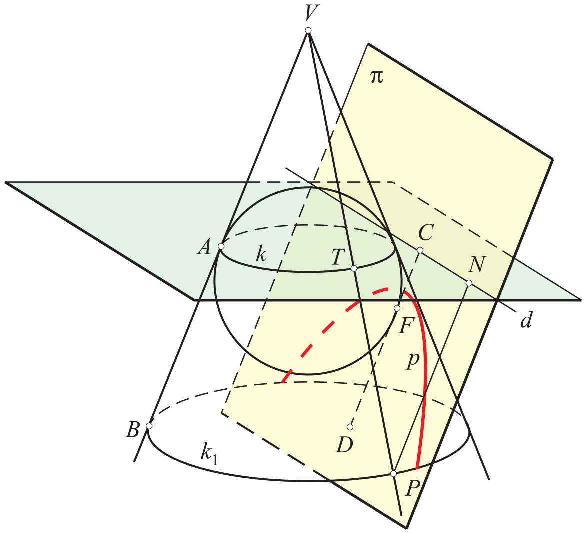


Slika 4.

ne π su F_1 i F_2, proizvoljna izvodnica VP stošca neka dira sferu S_1 u točki Q a S_2 u točki T (vidi sliku 4). Vrijedi (kao i u prethodnom slučaju $|PF_1| = |PQ|$, odnosno $|PF_2| = |PT|$, pa je $|PF_1| - |PF_2| = |PQ| - |PT| = |QT|$. Ova udaljenost također ne ovisi o izboru točke P pa je konstantna, i H je hiperbola sa žarištima u F_1 i F_2.

Parabola

Ako na slici 3 nagib ravnine π prema horizontalnoj ravnini raste, središte donje kugle udaljava se od vrha V a kugla postaje sve veća. U trenutku kada ta ravnina postane paralelna s jednom izvodnicom (a sve ostale izvodnice siječe) preostaje samo jedna Dandelinova kugla. Dodirna točka te kugle s ravninom π neka je F. Označimo s k kružnicu u kojoj kugla dira stožac. Središte druge kugle i njena dodirna točka "otišle" su beskonačno daleko. Odaberimo na presječnoj krivulji p bilo koju točku P. Izvodnica PV dira kuglu u točki T (vidi sliku 5). Vrijedi $|PF| = |PT| = |BA|$. Izvodnica SB nalazi se na osnom presjeku koji sadrži središte Dandelinove kugle, vrh stožaste plohe i točku F. Ravnina π je paralelna izvodnici SB. Na presječnici spomenutog osnog presjeka i ravnine π je pravac što sadrži dužinu $\overline{DC}$ i vrijedi $|BA| = |DC|$. Označimo s d presjek ravnine π i horizontalne ravnine koja sadrži kružnicu k. Kut između pravaca DC i d je pravi (jer je spojnica središta Dandelinove kugle s F okomita na tangencijalnu ravninu



Slika 5.

π pa tako i na svaki pravac koji toj ravnini pripada). Ako napokon translatiramo $\overline{DC}$ u $\overline{PN}$, vrijedi $|PF| = |PT| = |BA| = |DC| = |PN|$. Dakle, udaljenost bilo koje točke P presječne krivulje p do jedne čvrste točke (F) jednaka je udaljenosti te točke do jednog čvrstog pravca (d) pa se radi o paraboli.

Povećavamo li dalje kut ravnine π u odnosu na horizontalnu ravninu, ravnina π će sjeći gornji dio stožaste plohe, te će u presjeku biti hiperbola. Parabola je dakle prelazni slučaj između elipse i hiperbole.