Kamatni račun i vraćanje dugovanja

Sonja Banić, Ivanić-Grad

Česta i važna primjena kamatnog računa s kojom se susrećemo u svakodnevnici je izračun kamata kod raznih obročnih otplata, bilo da primjerice kupujemo na rate revolving karticama, uzimamo potrošački kredit ili dugoročni stambeni kredit. Možemo s velikom sigurnošću reći da će svi naši učenici kasnije kroz život biti u situacijama u kojima će se koristiti ovim oblicima plaćanja, i zato bi tijekom školovanja trebali upoznati načine obračuna kamata i troškove takvih kredita.

Kamata je naknada koju dužnik plaća vjerovniku zato što mu je na određeno vrijeme ustupio pravo raspolaganja određenim iznosom novca. Visina kamate određuje se u postotku, kamatnom stopom. Kamatna stopa se u pravilu odnosi na razdoblje od godinu dana. Kamatu plaćamo na iznos koji dugujemo i za razdoblje u kojem ga dugujemo.

Banke i kartične kuće omogućavaju korištenje revolving kredita. Korisnik kredita može iskoristiti iznos do određenog limita. Sam određuje veličinu i broj iznosa u kojima će otplaćivati kredit, s time da je određen najmanji iznos koji treba platiti svaki mjesec. Kamata se plaća svaki mjesec na neotplaćeni dio duga.

Primjer. Ivan je kupio računalo za 5500 kuna. Platio ga je kreditom na revolving kartici. Planirao je otplatiti kredit u 10 mjesečnih rata. Prva dva mjeseca uplatio je po 500 kuna, zatim je sljedeća tri mjeseca uplatio rate po 1000 kuna, i konačno još dvije rate, jednu od 800 i jednu od 700 kuna. Za kredit na kartici plaća kamatu od 9.6 % godišnje. Kamata se obračunava proporcionalnom metodom. Koliko je ukupno kamata Ivan platio za taj kredit? Koliko je zapravo platio računalo? Isplati li se takav način kupovine i zašto? Koliko bi kamata platio da je kredit otplaćivao u 10 jednakih mjesečnih obroka?

Ivan će kamatu platiti svaki mjesec za iznos koji duguje taj mjesec. Kamatnu stopu treba iz godišnje preračunati u mjesečnu stopu, proporcionalnom metodom. Zadatak će biti najlakše riješiti ako podatke prikažemo u tablici.

Godišnja kamatna stopa je 9.6 %, pa je odgovarajuća mjesečna stopa $9.6 : 12 = 0.8\ \%$.

Kamate za svaki mjesec plaćamo na iznos koji smo bili dužni prethodni mjesec. Prvi mjesec bili smo dužni 5300 kuna, pa je kamata za prvi mjesec $K = 5500 \cdot 0.8 : 100 = 44$ kune. Sljedeći

Sonja Banić, prof. savjetnik, Srednja škola "Ivan Švear", Ivanić-Grad

Mjesec	Rata	Kamate	Ostatak duga
0			5500.00
1	500.00	44.00	5000.00
2	500.00	40.00	4500.00
3	1000.00	36.00	3500.00
4	1000.00	28.00	2500.00
5	1000.00	20.00	1500.00
6	800.00	12.00	700.00
7	700.00	5.60	0.00
Zbroj		185.60	

mjesec dug je iznosio 5000 kuna, pa je kamata $K = 5000 \cdot 0.8 : 100 = 40$ kuna, i tako redom. Kroz sedam mjeseci otplate Ivan je platio 185.60 kuna kamata, pa ga računalo košta 5685.60 kuna. Računalo bi platio manje da je platio cijeli iznos odmah, bez kamata. Ali ako nema dovoljno novaca, a računalo mu treba odmah, isplati se kupiti na ovaj način.

Na ovom nivou primjer je prikladan za učenike osnovne škole. Kroz ovakav primjer učenici dobivaju točnu predodžbu o tome kako se plaćaju kamate na dug koji se otplaćuje u obrocima.

Ako Ivan računalo otplaćuje u 10 jednakih obroka, otplatu možemo prikazati kao u tablici gore lijevo.

U ovoj situaciji Ivan sporije otplaćuje dug i zato plaća veću kamatu.

Ali ako pogledamo iznose mjesečnih kamata, možemo uočiti da oni čine aritmetički niz u kojem je prvi član 44, a razlika iznosi 4.4. Ukupnu kamatu možemo dobiti kao zbroj svih članova tog niza

$$K = \frac{10}{2}(44 + 4.4) = 242.$$

Primjenjujući zbroj članova aritmetičkog niza možemo odgovoriti na pitanje: koliko bi kamata platio Ivan da je računalo otplatio u 20 rata po 275 kuna?

U ovom primjeru mjesečni iznosi u kojima se otplaćuje dug nisu jednaki, jer se kamata s vremenom smanjuje. I dužnicima i vjerovnicima često odgovara da iznosi u kojima se vraća dug budu jednaki. Ta-

Mjesec	Rata	Kamate	Ostatak duga
0			5500.00
1	550.00	44.00	4950.00
2	550.00	39.60	4400.00
3	550.00	35.20	3850.00
4	550.00	30.80	3300.00
5	550.00	26.40	2750.00
6	550.00	22.00	2200.00
7	550.00	17.60	1650.00
8	550.00	13.20	1100.00
9	550.00	8.80	550.00
10	550.00	4.40	0.00
Zbroj	5500.00	242.00	

ko je u modelima otplate kratkoročnih potrošačkih kredita uobičajeno da se izračunaju ukupne kamate koje treba platiti na kredit i taj se iznos podijeli s brojem mjeseci otplate i zbroji s ratom. Tako su svi mjesečni iznosi jednaki. Taj postupak nije primjeren za dugoročne zajmove.

Za obračun otplate dugoročnih zajmova primjenjuje se složeni kamatni račun. Iznosi u kojima se zajam otplaćuje nazivaju se anuiteti (a). Anuitet je zbroj otplatne kvote (R) i kamata (K). Otplatna kvota je dio osnovnog duga koji se otplaćuje u pojedinom anuitetu. Periodi u kojima se anuiteti otplaćuju mogu biti različiti. Kao pojedinci navikli smo razmišljati o mjesečnim otplatama kredita, tj. mjesečnim anuitetima. No radi jednostavnosti računa, primjere ćemo napraviti za godišnje anuitete.

Otplata zajma prikazuje se u otplatnoj tablici.

Zanimljiva su nam dva modela otplate zajma: model jednakih otplatnih kvota i model jednakih anuiteta.

Model jednakih otplatnih kvota jednak je drugom dijelu prethodnog primjera.

Primjer. Zajam od 750 000.00 kuna odobren je po modelu jednakih otplatnih kvota. Otplaćuje se u godišnjim anuitetima.

a) Sastavi otplatnu tablicu zajma i izračunaj ukupne kamate ako je rok otplate 5 godina, uz kamatnu stopu 6.5 % godišnje.

b) Izračunaj ukupne kamate ako je rok otplate 20 godina, uz kamatnu stopu 6.5 % godišnje.

Rješenje.

a) Zajam ćemo otplatiti s pet anuiteta, pri čemu su otplatne kvote jednake

$$R = 750\,000 : 5 = 150\,000 \text{ kuna.}$$

Anuiteti će biti različiti, jer ćemo svake godine platiti drugu kamatu.

	Anuitet (a)	Kamata (K)	Otplatna kvota (R)	Ostatak duga (C)
0				750 000
1	198 750	48 750	150 000	600 000
2	189 000	39 000	150 000	450 000
3	179 250	29 250	150 000	300 000
4	169 500	19 500	150 000	150 000
5	159 750	9750	150 000	0
Σ	869 250	146 250	750 000	

Iz tablice vidimo da je ukupno plaćeno 146 250 kuna kamate na zajam. Anuiteti su različiti i s vremenom se smanjuju.

b) U ovom modelu otplate kamate čine aritmetički niz. Prvi član tog niza su kamate za prvu godinu, na ukupan dug: $a_1 = C_0 \cdot \frac{p}{100}$, a posljednji član kamate za posljednju godinu, na jednu otplatnu kvotu: $a_n = \frac{C_0}{n} \cdot \frac{p}{100}$. Razliku niza čine kamate na otplatnu kvotu, $d = -\frac{C_0}{n} \cdot \frac{p}{100}$. Zajam od 750 000 kuna otplaćujemo u 20 anuiteta, pa su otplatne kvote $R = 750\,000 : 20 = 37\,500$ kuna. Kamate za prvu godinu su $K_1 = 750\,000 \cdot 0.065 = 48\,750$, a kamate za posljednju godinu su $K_{20} = 37\,500 \cdot 0.065 = 2437.50$. Ukupne kamate iznose:

$$K = \frac{20}{2} \cdot (48\,750 - 2437.50) = 463\,125 \text{ kuna.}$$

Uočimo da prvi anuitet iznosi $a_1 = 37\,500 + 48\,750 = 86\,250$ kuna, a posljednji $a_{20} = 37\,500 + 2437.50 = 39\,937.50$ kuna. Prvi anuitet je bitno veći od posljednjega.

Ovako velika razlika u anuitetima obično ne odgovara zajmoprimcu, pa je uobičajeno da se zajmovi otplaćuju po modelu jednakih anuiteta.

Za model jednakih anuiteta prvo treba izračunati anuitet. Tu primjenjujemo složeni kamatni račun i geometrijski niz. Zbroj vrijednosti svih anuiteta u trenutku stavljanja zajma u otplatu treba biti jednak iznosu zajma. Budući da pojedini anuitet a_n plaćamo n godina nakon stavljanja zajma u otplatu, njegova početna vrijednost je $\frac{a}{r^n}$, gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$ dekurzivni kamatni faktor [1], a anuitet i n broj godina od stavljanja zajma u otplatu.

Ako je C ukupni iznos zajma, tada vrijedi:

$$C = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \ldots + \frac{a}{r^n}.$$

U izrazu prepoznajemo zbroj n članova geometrijskog niza kojem je prvi član $\frac{a}{r}$, a količnik $\frac{1}{r}$. Primjenom formule za zbroj prvih n članova geometrijskog niza, nakon sređivanja dobivamo:

$$C = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)},$$

odnosno anuitet je

$$a = C \cdot \frac{r^n (r - 1)}{r^n - 1}.$$

Sada možemo prethodni primjer riješiti primjenom modela jednakih anuiteta.

Primjer. Zajam od 750 000.00 kuna odobren je po modelu jednakih godišnjih anuiteta.

a) Sastavi otplatnu tablicu zajma i izračunaj ukupne kamate ako je rok otplate 5 godina, uz kamatnu stopu 6.5 % godišnje.

b) Izračunaj ukupne kamate ako je rok otplate 20 godina, uz kamatnu stopu 6.5 % godišnje.

Rješenje.

a) Prvo moramo izračunati anuitet:

$$a = C \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 750\,000 \cdot \frac{1.065^5 \cdot 0.065}{1.065^5 - 1} = 180\,475.90 \text{ kuna.}$$

Ukupne kamate na zajam su razlika između vraćenog i dobivenog iznosa, $K = na - C$.

	Anuitet (a)	Kamata (K)	Otplatna kvota (R)	Ostatak duga (C)
0				750 000.00
1	180 475.90	48 750.00	131 725.50	618 274.10
2	180 475.90	40 187.82	140 288.08	477 986.02
3	180 475.90	31 069.09	149 406.81	328 579.21
4	180 475.90	21 357.65	159 118.25	169 460.96
5	180 475.90	11 014.94	169 460.96	0
Σ	902 379.50	152 379.50	750 000	

Iz tablice vidimo da je ukupno vraćeno 902 379.50 kuna, a dobiveno 750 000 kuna, pa su ukupne kamate 152 379.50 kuna.

b) Prvo računamo anuitet:

$$a = C \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 750\,000 \cdot \frac{1.065^{20} \cdot 0.065}{1.065^{20} - 1}$$
$$= 68\,067.30 \text{ kuna.}$$

Ukupne kamate na zajam iznose

$$K = na - C = 20 \cdot 68\,067.3 - 750\,000$$
$$= 1\,361\,346 - 750\,000 = 611\,346 \text{ kuna.}$$

Uočimo da ćemo u ovom slučaju vratiti gotovo dvostruki iznos zajma. Ukupne kamate bitno su veće za zajam po modelu jednakih anuiteta nego što su po modelu jednakih otplatnih kvota.

U primjerima se mogu mijenjati rok otplate i kamatna stopa te proučavati kako te promjene utječu na anuitet i ukupne kamate na zajam.

U zadatcima se može zadati i grafički prikaz anuiteta te iz njega očitati i izračunati neke podatke o zajmu.

Zadatak 1. Na slici gore desno je dan grafički prikaz iznosa godišnjih anuiteta za neki zajam. Proučite podatke iz slike i dogovorite na pitanja:

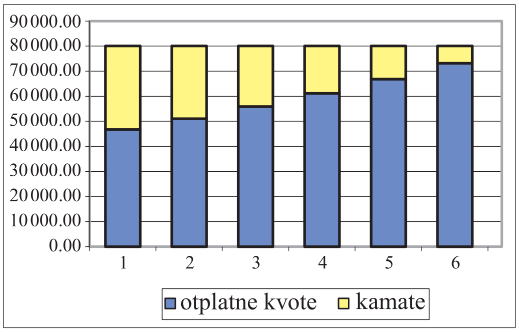
a) Na koji rok je zajam odobren?

b) Po kojem se modelu otplaćuje?

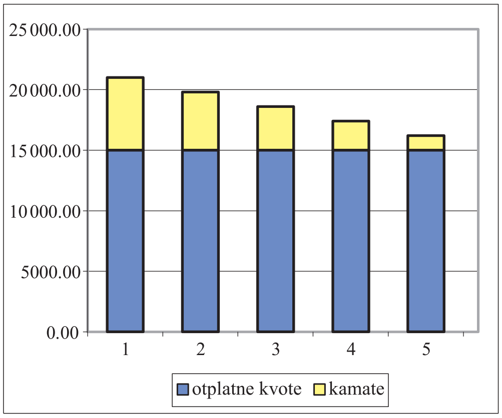
c) Koliki je iznos godišnjih anuiteta?

d) Koliki je odobreni iznos zajma ako je kamatna stopa 9.4 %?

e) Koliko iznose ukupne kamate na zajam?



Zadatak 2. Na slici je dan grafički prikaz iznosa godišnjih anuiteta za neki zajam. Proučite podatke iz slike i dogovorite na pitanja:



a) Na koji rok je zajam odobren?

b) Po kojem se modelu otplaćuje?

c) Koliki je odobreni iznos zajma?

d) Kakav je iznos godišnjih anuiteta?

e) Uz koju je kamatnu stopu zajam odobren, ako je iznos prvog anuiteta 21 000.00 kuna?

LITERATURA

1/ S. Banić, *Od jednostavnog do složenog kamatnog računa*, Matematika i škola 83, Element, Zagreb, veljača 2016.